完全自作問題集

黒猫の三角

2018年8月13日

問題 1　以下の問いに答えよ．

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to+0}\int_n^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{x}{\tan x}-1\right)^2dx$ を求めよ．

(2)　方程式 $2x^6-15x^5+28x^4+6x^3-28x^2-15x-2=0$ の解を全て求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{|x^3|e^{x^2}}{1+e^x}\,dx$ の値が $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$ の値に等しいことを示し，その値を計算せよ．

(4)　次の極限 $(*)$ はある実数値に収束する．区分求積法を用いてその値を求めよ．但し a は 1 でない正の実数とする．

$$(*):\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}}{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}$$

(5)　2 以上の自然数 n に対して

$$a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)\cdots(k+n-2)\}}$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．必要なら $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$ を用いてよい．

(6)　$a_n=\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{1\cdot3\cdots(2n-1)}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(7)　$\displaystyle\left(x+\frac{1}{4x}-1\right)^n$ を展開したときの定数項を求めよ．(n:自然数)

(8)　$\displaystyle p_n=\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_nC_k$ 及び $\displaystyle q_n=\sum_{k=n+1}^{2n}{}_kC_n$ をそれぞれ計算せよ．但し n は自然数である．

(9)　$P(x)=x^{2n}$ を $(x-2)^n$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とする．$R(x)$ の最高次の項の係数及び定数項を求めよ．n は自然数とする．

(10)　実数 p,q が $0\leqq p<2\pi,\ 0\leqq q<2\pi$ の範囲を互いに独立に動くとき,

$$z=\frac{\cos p+\cos q}{3+\sin p+\sin q}$$

の最大値と，そのときの $\sin p,\cos p,\sin q,\cos q$ の値を求めよ．

(11)　M を非負整数，n を自然数とする．$\dfrac{(2^{M+1}n)!}{n!}$ は 2 で何回割り切れるか．

(12)　${}_0C_0=1$ とする．$n\geqq j\geqq 0$ を満たす整数 n,j について $\displaystyle\sum_{i=j}^{n}(-1)^i\cdot{}_nC_i\cdot{}_iC_j$ を計算せよ．

(13)　次の極限を求めよ．但し，$y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\sin^{-1}x$ とする．

$$\lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{1-\cos a}{a}\right)$$

問題 2　n^2+2 が $2n+1$ の倍数となるような自然数 n を全て求めよ．

問題 3　m を自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 x^m dx$ を計算せよ．

(2)　自然数 n に対して，$Sn = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$ とおくとき, 全ての n に対して $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1} a_{(m,i)} \cdot n^i$ が成り立つような実数 $a_{(m,i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ が存在することが分かっている．このとき $a_{(m,m+1)} = \dfrac{1}{m+1}$ を区分求積法を用いて示せ．

問題 4　円に内接する四角形 $ABCD$ があり，辺 BC と辺 CD の長さは等しい．辺及び対角線の長さを $AB = \alpha, BC = CD = \beta, DA = \gamma, AC = \delta$ とおき, 四角形 $ABCD$ の外接円，$\triangle ABC$ の内接円及び $\triangle ACD$ の内接円の半径をそれぞれ R, r_1, r_2 とおくとき，以下の条件 $(*)$ が成り立つ．$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の値をそれぞれ求めよ．

$$(*) : \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{は全て整数でどの 2 つをとっても互いに素} \\ R : r_1 : r_2 = 14 : 3 : 6 \\ \angle ADC = 60^\circ \end{cases}$$

問題 5　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上の $x > 0$ かつ $y > 0$ を満たす点における接線と，x 軸，y 軸の交点をそれぞれ A, B とするとき線分 AB の長さの最小値とそのときの接点の座標を求めよ．

問題 6　A を正の定数とする．微分方程式 $y'' = -Ay$ を解け．

問題 7　a, b, c, d はすべて異なる素数で，少なくとも 1 つは偶数とする．2 以上の整数 n に対して $f(n) = (n$ の正の約数のうち n 自身を除いたものの総和$)$ と定義する．$A = a^2bc, B = a^2d$ とおくと $f(A) = B, f(B) = A$ が成り立つとき A, B の値を求めよ．

問題 8　楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ に対し，C の外部の点 R を通る 2 本の接線が直交するような点 R の軌跡の方程式を求めよ．

問題 9　(1)　すべての自然数 n について $2^{n-1} \geqq n$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つ n を求めよ．

(2)　2 個以上の 1 でない自然数の組で，それらの和と積が等しくなるものを全て求めよ．

問題 10　$2l^2 = m^2 - mn + n^2$ を満たす自然数 l, m, n の組は存在しないことを示せ．

問題 11　半径 $r \left(r > \dfrac{\sqrt{2}}{\pi} \text{を満たす} \right)$ の円周上に，長さが $2\sqrt{2}$ となる弧 AB (L とする) をとる．L と線分 AB に囲まれた面積 S を最大にする r の値と，そのときの S の値を求めよ．

問題 12　(1)　任意の自然数 n 対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ を求めよ．

問題 13　円に内接する 4 角形 $ABCD$ が $BC = p (> 1), DA = 1, AB : CD = p : 1$ を満たす．$\triangle ABC$ の

面積の最大値と，そのときの $\sin(\angle BAD + \angle ABC)$ の値を求めよ．

問題 14　n 個の赤玉と n 個の白玉が入った袋から n 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が k 個 $(0 \leqq k \leqq n)$ 含まれる確率を p_k とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k, \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k$ をそれぞれ求めよ．

問題 15　$a_n = (\sqrt{s} + \sqrt{s+t})^n (s, t$: 自然数$)(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とする．任意の自然数 n に対して $a_n = \sqrt{s_n} + \sqrt{s_n + t^n}$ が成り立つような自然数 s_n が存在することを示せ．

問題 16　三角形 ABC が

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 2$$

を満たすとき，$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ の取り得る値の範囲を求めよ．

問題 17　整数定数 p, q, r, c が $p = rc^2 + c, q = 2rc + 1$ を満たす．このとき，任意の整数 n に対して $px^2 + qxy + ry^2 = n$ を満たす互いに素な整数 (x, y) の組が存在することを示せ．

問題 18　関数 $f(x)$ はすべての整数 n に対し $f(n) = 2n - 5$ を満たし，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ を満たす．以下の問に答えよ．

(1)　$\displaystyle 4x - 8 < \int_x^{x+2} f(t)\,dt < 4x - 4$ を示せ．

(2)　$\displaystyle 5x - 3 < \int_x^{x+2} \{f(t) + f^{-1}(t)\}\,dt < 5x + 3$ を示せ．但し $f^{-1}(x)$ は $f(x)$ の逆関数である．

問題 19　$f(x)$ を x の 2015 次整数係数多項式 (x^{2015} の係数は 0 ではない) とする．$|f(x)|$ の値を合成数とするような整数 x が無数に存在することを示せ．但し，合成数とは 2 個以上の素数の積として表される自然数である．

問題 20　以下の問に答えよ．

(1)　p を素数，a を自然数とする．$a^p - a$ が p で割り切れることを a についての数学的帰納法で示せ．

(2)　初項 a_1 が自然数で，2 項目以降の項が漸化式 $a_{n+1} = ka_n + k - 1$(k は定数で，自然数) で与えられる数列 $\{a_n\}$ は合成数の項を含むことを示せ．

問題 21　隣接する 2 項間の関係が漸化式 $a_{n+1} = 2 + \dfrac{2}{a_n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について $\alpha = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値が初項 $a_1 (> 0)$ にかかわらず一定であることを示し，その α を求めよ．

問題 22　1 辺の長さが x の立方体と 1 辺の長さが y の正四面体を考える．2 つの立体の体積の和が 1 となるように x, y を変化させるとき，2 つの立体の表面積の和が最大となるときの 2 つの立体の体積比を求めよ．

問題 23　n を自然数とする．x の方程式 $x^3 + n - 1 = n \cdot \sqrt[3]{nx - n + 1}$ が 3 つの異なる整数解をもつような n の条件を求めよ．

問題 24　(1)　a, b を互いに素な自然数とする．非負整数 m, n を用いて

$$x = ma + nb$$

と表すことのできないような自然数 x はいくつあるか．

(2) $a_1, a_2, \ldots, a_N$ はどの 2 つをとっても互いに素な自然数とする．非負整数 $m_1, m_2, \ldots, m_N$ を用いて

$$x = m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_Na_N$$

と表すことのできないような自然数 x はいくつあるか．

問題 25　方程式 $x^2 + y^2 = k^2(k:$ 正の実数$)$ がある有理数解 $(x, y) = (x_0, y_0)$ をもつとき．この方程式は有理数解を無限個 (可算個) もつことを示せ．但し，有理数解とは x, y の値がともに有理数である解のことである．

問題 26　$a^b = b^a$ かつ $0 < a < b$ を満たす有理数 (a, b) の組を a の値の小さい順に並べたとき，n 番目の組 (n:自然数) は

$$(a, b) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

であることを示せ．但し，$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ を満たす (単調増加列である) ことを用いてよい．

問題 27　周期 ω の連続な周期関数 $f(x)$ について，以下の条件 $(*)$ を満たす実数 p が存在することを示せ．

$$(*)\begin{cases} 0 \leqq p < \frac{\omega}{2} \\ f(p) = f(p + \frac{\omega}{2}) \end{cases}$$

$f(x)$ が周期 ω の周期関数であるとは，任意の x について $f(x) = f(x + \omega)$ が成り立つことである．

問題 28　半径が $a_1, a_2(a_1 > a_2)$ である 2 つの円 C_1, C_2 が互いに接しており，その共通外接線の 1 本を l とする．2 つの円 C_n, C_{n+1} および直線 l のすべてに接する円で，半径が a_{n+1} よりも小さい円を C_{n+2}, その半径を a_{n+2} とする $(n = 1, 2, \ldots)$. このとき，全ての n について a_n が有理数となるときの a_1, a_2 の満たすべき条件を求めよ．

問題 29　任意の a, b, p, q に対して 2 次方程式 $x^2 + tax + ub = 0$ の解が $x = p \pm v\sqrt{q}$ であることと，$y^2 + tpy + uq = 0$ の解が $y = a \pm v\sqrt{b}$ であることが同値となるような t, u, v の条件を求めよ．

問題 30　$n(n+1)(n+2)(n+3) + k$ がすべての自然数 n に対して平方数となるような自然数 k を求めよ．また，そのような k がただ一つであることを示せ．

問題 31　任意の非負整数 n, p について，$(p+1)^{p^n}(p+1$ の p^n 乗$)$ を p^{n+1} で割った余りが 1 であることを示せ．

問題 32　任意の自然数 p, n について，

(1) p が奇数のとき，$p^{(p+1)^n} - 1$ が $(p+1)^{n+1}$ の倍数であることを示せ．

(2) p が偶数のとき，$p^{(p+1)^n} + 1$ が $(p+1)^{n+1}$ の倍数であることを示せ．